Des nombres au carré

Premières et secondes du Lycée Ferdinand Buisson de Voiron
Troisièmes du Collège Plan Menu de Coublevie

Présentation du sujet

Notre objectif est d'étudier le comportement des nombres lorsqu'on additionne les carrés de leurs chiffres. Concrètement, pour un nombre entier donné, on calcule la somme des carrés de ses chiffres, puis on répète l'opération avec le résultat obtenu.

Exemple : Si on part de 15,

$$15 \to 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$$
$$26 \to 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40 \to \dots$$

Premières recherches

Pour mieux maitriser notre sujet, nous avons testé de nombreux nombres, à la main ou à l'ordinateur, et en avons tiré des observations et des statistiques.

Boucles

Après nos recherches, nous observons qu'il n'existe que trois boucles possibles :

- **Boucle de 0** : Le seul nombre qui y appartient est 0.
- **Boucle de 1** : après quelques itérations, on aboutit à une puissance de 10, puis on boucle sur 1.
- **Boucle de 4** : $4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to \dots$

Statistiques

Grâce à des programmes informatiques, nous avons obtenu les statistiques suivantes (sur 100000 nombres) :

Statistiques des boucles	
Boucle de 0	0.0001 %
Pourcentage de boucles de 1	14.376 %
Pourcentage de boucles de 4	85.623 %

Conclusion et élargissement

Au cours de l'année, nous avons démontré que, pour tout nombre m de n chiffres, si on additionne les carrés de ses chiffres et qu'on répète l'opération un nombre fini de fois, la suite de nombres finit par boucler : soit dans la boucle de 0 si le nombre est 0, soit dans la boucle de 1 (un peu plus d'un nombre sur 10), soit dans la boucle de 4 (presque 9 nombres sur 10).

Nous pouvons élargir ce problème à l'étude d'autres suites, par exemple en utilisant les cubes des chiffres ou en changeant de système (binaire, etc.).

Démonstration

Une suite décroissante jusqu'à 243

Nous démontrons ici que si on applique la fonction à un nombre m de $n \geq 4$ chiffres, alors le résultat aura au moins un chiffre de moins.

Preuve pour $n = 4$:

$$81 \times 4 = 324 < 1000 = 10^{4-1}$$

Preuve de la validité pour n+1 : Supposons que pour un $n \geq 4$, $81n < 10^{n-1}$ soit vraie. Montrons que cela reste vrai pour $n+1$:

$$81(n+1) < 10^{(n+1)-1}$$

Or selon l'équation de départ :

$$81n + 81 < 10^{n-1} + 81$$

On doit alors montrer (on rappelle que $n \geq 4$) :

$$10^{n-1} + 81 < 10^n$$
$$\Leftrightarrow 10^{n-1} > 9$$

Boucle dans 243

Soit un nombre à trois chiffres $c_2c_1c_0$, avec $0 < c_2 \leq 9$ et $0 \leq c_1, c_0 \leq 9$.

$$c_2^2 + c_1^2 + c_0^2 \leq 9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$$

Donc, pour un nombre à trois chiffres, le résultat retombera toujours en dessous de 243 après une itération.

Conclusion

La suite obtenue pour un nombre à $n \geq 4$ chiffres retombera toujours en dessous de 243 après un nombre fini d'itérations. Comme il n'existe qu'un nombre fini d'entiers entre 0 et 243, toutes les suites finiront par boucler après un nombre fini d'itérations.

LaTeX TikZposter